2- $1 \in \mathbb{Z}$ ve $x = 0_R . x + 1 . x \in A$ olup $A \neq \emptyset$ dir (2)

- $a_1 = r_1 x + n_1 x$, $a_2 = r_2 x + n_2 x \in A$ için

$a_1 - a_2 = (r_1 - r_2) x + (n_1 - n_2) x \in A$ dir

- $a \in R$ ve $rx + nx \in A$ olsun. $n \geq 0$ ise

$$
\begin{aligned}
a(rx+nx) &= a(rx) + a(nx) \\
&= (ar)x + a(x + \dots + x) \\
&= (ar)x + ax + \dots + ax \\
&= (ar)x + n(ax)
\end{aligned}
$$

$n < 0$ ise

$$
\begin{aligned}
a(rx+nx) &= a(rx) + a(nx) \\
&= (ar)x + a((-x) + \dots + (-x)) \\
&= (ar)x + a(-x) + \dots + a(-x) \\
&= (ar)x + n(ax)
\end{aligned}
$$
dir

$A \leq M$ dir.

3- a) s, r nin sol tersi olsun. $sr = 1_R$, $s \in R$

$0 \neq m \in M$ için $rm = 0 \Rightarrow s(rm) = (sr)m = s0$

$= 1 . m = 0$

çelişkisi elde edilir.

b) $0_R \in R$ için $M . 0_R = 0$ olup $K \neq \emptyset$ dir

- $x, y \in K \Rightarrow Mx = My = 0$ dir

$\cancel{(x-y)M} \neq M(x-y) = Mx - My = 0 - 0 = 0$

$\Rightarrow x - y \in K$ dir.

- $\forall r \in R$, $\forall x \in K \Rightarrow Mx = 0$ dir

$x.r$ ve $rx \overset{?}{\in} K$ $\quad M(xr) = (Mx)r = 0$

olup $xr \in K$, $M(rx) = Mx = 0$ olup

K, R'nin idealidir.

4- $End(M) \times M \longrightarrow M$ ③

$(f, m) \longrightarrow f.m = f(m)$

- $\forall f, g \in End(M)$ ve $\forall m, m_1, m_2 \in M$ için

a) $f.(m_1+m_2) = f(m_1+m_2) = f(m_1) + f(m_2) = f.m_1 + f.m_2$

b) $(f+g).m = (f+g)(m) = f(m) + g(m) = f.m + g.m$

c) $(f.g).m = (f.g)(m) = f(g(m)) = f(g.m)$

$= f.(g.m)$

olup M $End(M)$- Modüldür.

Modül Teori Dersi Final Cevap Anahtarı

1. a) $x \in \varphi^{-1}(\varphi(N)) \Rightarrow \varphi(x) \in \varphi(N)$

$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(a), \exists a \in N$

$\Rightarrow \varphi(x) - \varphi(a) = 0_M$

$\Rightarrow \varphi(x-a) = 0_M$

$\Rightarrow x-a \in \mathrm{Çek}\varphi$

$\Rightarrow x-a = b, \quad \exists b \in \mathrm{Çek}\varphi$

$\Rightarrow x = a+b \in N + \mathrm{Çek}\varphi$

$a \in N + \mathrm{Çek}\varphi \Rightarrow a = n+b, \; n \in N, b \in \mathrm{Çek}\varphi$

$\Rightarrow a-n = b$

$\Rightarrow \varphi(a-n) = \varphi(b) = 0_M$

$\Rightarrow \varphi(a) - \varphi(n) = 0_M$

$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(n)$

$\Rightarrow \varphi(a) \in \varphi(N) \Rightarrow a \in \varphi^{-1}(\varphi(N))$

$\varphi(N)$ bir R- Modül

b) $f: N \longrightarrow \varphi(N)$ epimorfizmasıdır. Çek$f$-yi hesaplayalım. ($a \in N$, $f(a) = \varphi(a)$ ile tanımlansın)

$\mathrm{Çek}f = \{a \in N \mid \varphi(a) = 0_M\}$

$a \in \mathrm{Çek}f \Leftrightarrow a \in N \wedge \varphi(a) = 0_M$

$\Leftrightarrow a \in N \wedge a \in \mathrm{Çek}\varphi$

$\Leftrightarrow N \cap \mathrm{Çek}\varphi$

homomorfizma teoremi gereği

$N / N \cap \mathrm{Çek}\varphi \cong \varphi(N)$ dir.